Université de Lorraine – Metz, UFR MIM
Licence de Mathématiques, 2013-2014
Analyse numérique non linéaire

TD 2

1- Méthode de Runge-Kutta RK4
Le tableau de Butcher du schéma en temps RK4 s'écrit:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

1) Expliquer comment le tableau ci-dessus est utilisé pour programmer le schéma RK4 en version "k" (calcul des pentes et assemblage final).
2 Ecrire un programme matlab qui résoud le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(y(t), t), \quad y(t) \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

avec le schéma RK4.
3) On considère le problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = -1 + 2t + \frac{y^2}{(1+t^2)^2} \\ y(0) = 2 \end{array} \right. \tag{2}$$

Vérifier que la fonction $y(t) = 1 + t^2$ est l'unique solution de (2).
4) Résoudre numériquement le problème (2) avec le schéma RK4. On utilisera successivement $N = 10, 20, 40, 80$ points.
5) Calculer l'erreur globale donnée par

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - y(t^n)|. \tag{3}$$

6) On suppose que le schéma en temps utilisé est d'ordre $\alpha > 0$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de Δt telle que

$$\max_{n, n\Delta t \leq T} |y^n - y(t^n)| \leq C \Delta t^\alpha \tag{4}$$

Vérifier que α est approximativement donné par

$$\alpha \simeq \ln(e_{\Delta t/2}/e_{\Delta t}) \tag{5}$$

7) Evaluer les 3 estimations de α dans le cas du calcul précédent déduites des couples de grilles en temps $(N = 10/N = 20)$, $(N = 20/N = 40)$, $(N = 40/N = 80)$.
8) Reprendre la même démarche pour le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = te^{-y} + \frac{t}{1+t^2} \\ y(0) = 0 \quad ; \quad \text{(solution exacte } y(t) = \ln(1+t^2)) \end{array} \right. \tag{6}$$

2- Equation de Van der Pol
On considère l'equation de Van der Pol suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) + \varepsilon(x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = a, \quad x'(0) = b \end{array} \right. \tag{7}$$

1) Mettre ce probleme sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = x_2(t) - f(x_1(t)) \\ x_2'(t) = -x_1(t) \\ x_1(0) = a' \qquad x_2(0) = b' \end{array} \right. \tag{8}$$

On précisera les quantités x_1 et x_2 en fonction de x, ainsi que a' et b'.
2) On appelle *portrait de phase* pour le système (8) la courbe paramétrée $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)$. On considère le cas $\varepsilon = 1$. Tracer le portrait de phase approché quand on utilise le schéma RK4 pour (8) pour les conditions initiales $(a, b) = (1, 0)$ et $(a, b) = (0, 1)$. On fera le nombre d'itérations nécessaires pour que la courbe $(x_1(t), x_2(t))$ converge visuellement vers un cycle limite.
3) Pour une equation différentielle $X'(t) = F(X(t))$, $X \in \mathbb{R}^n$ on appelle *point d'équilibre* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(X_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Calculer les points d'équilibre de (8). En déduire les solutions $t \mapsto x(t)$ qui coïncident avec ces points d'équilibre.
4) Effectuer des simulations avec le schéma RK4 pour (8) pour les deux conditions initiales précédentes lorsque $\varepsilon \to 0$. On pourra utiliser $\varepsilon = 0.5, 0.25, 0.1, 0.01$.
5) Tester le programme avec $\epsilon = 0$, puis tester également pour $\epsilon = -0.01, -0.1, -0.25, -0.5$.
6) Vérifier numériquement que $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est un point d'équilibre instable.

3- Equation de Stuart-Landau
On considère le système différential complexe (équation de Stuart-Laundau) dont l'inconnue est $W(t) = X_1(t) + iX_2(t)$ avec $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} W'(t) = (1 + ic_0)W(t) - (1 + ic_2)|W(t)|^2 W(t) \\ W(0) = a + ib \end{array} \right. \tag{9}$$

1) Exprimer (9) sous la forme d'un système différentiel en $X(t) = (X_1(t), X_2(t)) \in \mathbb{R}^2$.
2) Résoudre (9) de façon approchée à l'aide du schéma RK4. On utilisera les successivement les 3 conditions initiales $W_0 = 1, W_0 = i, W_0 = 1 + i$. On représentera les portraits de phase dans l'espace (X_1, X_2).
3) Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Vérifier que $W_0(t) = \exp(i\omega_0 t)$ est une solution périodique de (9) lorsque l'on a $\omega_0 = c_0 - c_2$.
4) On étudie les solutions de la forme $W(t) = W_0(t)(1 + w(t))$, où $w(t)$ représente une "petite perturbation" autour de la solution peériodique $W_0(t)$. Montrer que la fonction $t \mapsto w(t)$ satisfait une équation différentielle de la forme

$$w'(t) = -(1 + ic_2)(w(t) + \bar{w}(t)) + O(|w(t)|^2) \tag{10}$$

øù $O(|w|^2)$ désigne des termes de l'ordre de $|w|^2$ (ou plus petits).
5) Exprimer l'e.d.o.(10) (sans les termes en $O(|w|^2)$ sous la forme d'un système différentiel linéaire en $t \mapsto (\alpha(t), \beta(t)$ avec $w(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ de la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

où $\Lambda \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^2)$ est une matrice que l'on précisera.
6) Donner la solution analytique $w(t)$ de (11) en fonction de la condition initiale $w_0(t)$.
7) Tracer sur une même figure la solution calculée par RK4 de (9) et la fonction $W_0(t) + w(t)$. On présentera les résultats pour les 3 conditions initiales précédentes.
8) Commenter les résultats obtenus.